UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL MENDOZA

Teorema de no clonación e influencia en el entrelazamiento cuántico

Parte II

Dr. Ing. Ernesto Gandolfo Raso
egandolfo@frm.utn.edu.ar

Teorema de no clonación

El teorema establece que:

“No se puede diseñar un dispositivo que copie de forma perfecta un estado cuántico arbitrario sin alterar el estado original de algún modo”

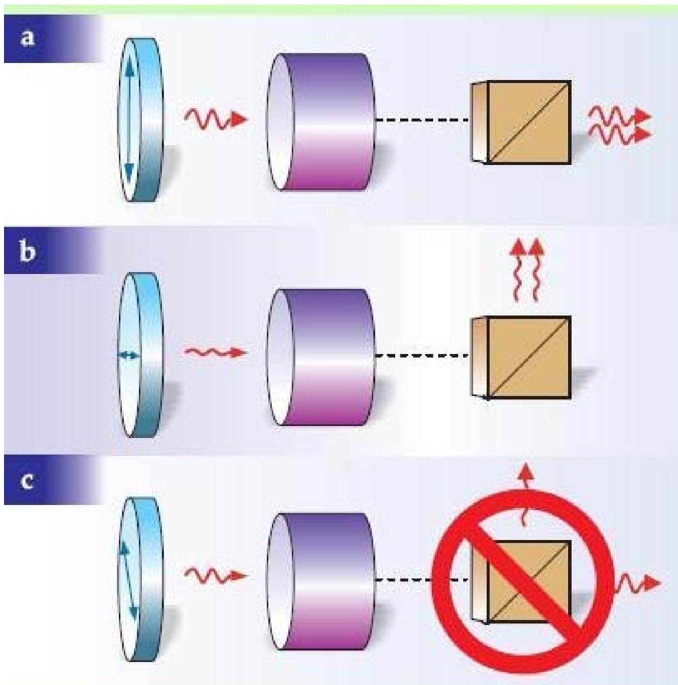
La clave de este asunto está en la palabra ‘arbitrario’. Si se desea copiar un estado cuántico que es desconocido, la mecánica cuántica demuestra que esto no sea posible.

Y no es posible por varios motivos:

Se puede diseñar un método de ‘copia’, pero este procedimiento alteraría el estado original. Por lo tanto, el que conociera el estado original se daría cuenta inmediatamente de que están intentando copiar dicho estado.

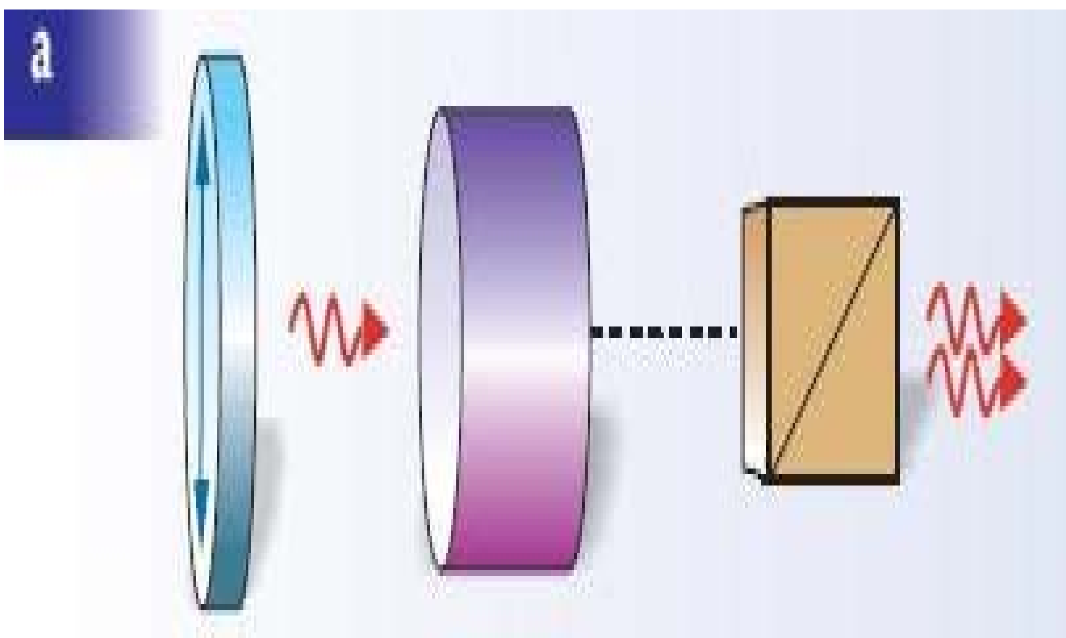
El copiador nunca estaría seguro de si lo que se obtiene por el método de copia es igual al estado (arbitrario) original o no.

¿Cómo funciona esto?
La idea básica de la imposibilidad de clonar un estado arbitrario se basa en lo siguiente:
Supongamos que tenemos una fuente de fotones. Como partículas de luz que son estos fotones pueden estar en distintos estados de polarización.
La polarización puede ser vertical, horizontal o un estado combinación (arbitraria) de los dos anteriores.

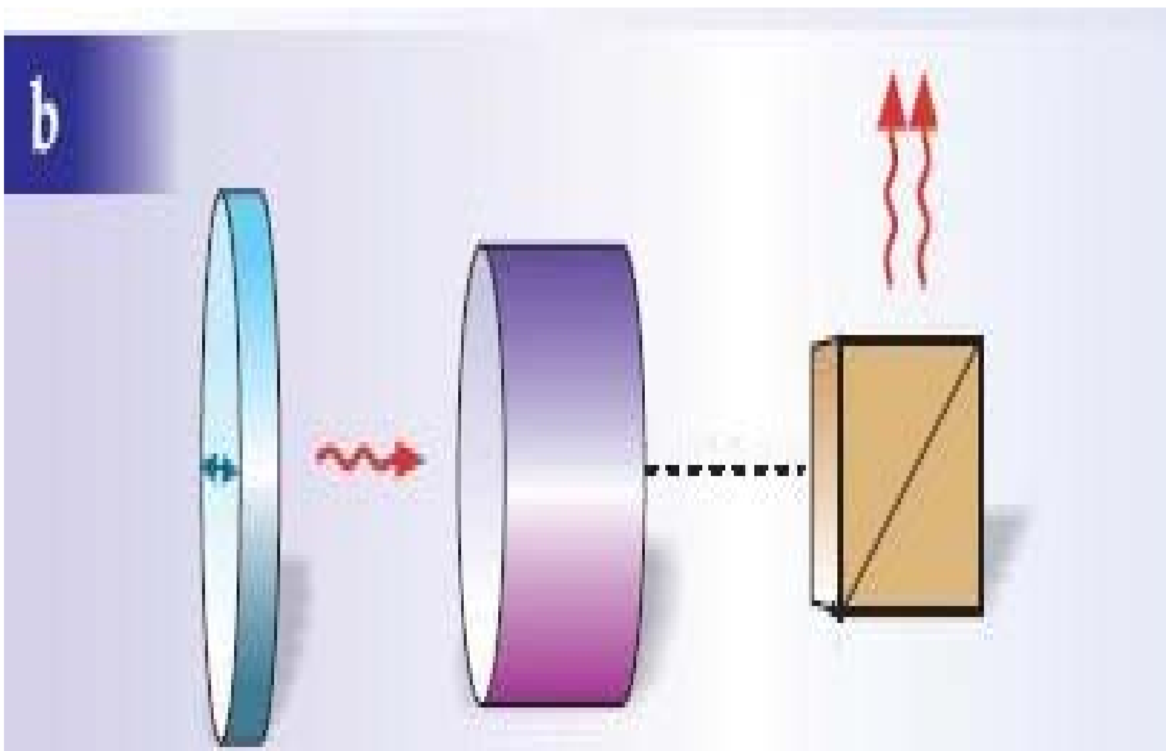


Supongamos que poseemos una máquina de copiar (el cilindro violeta de la imagen), entonces puede que nos de los siguientes resultados:

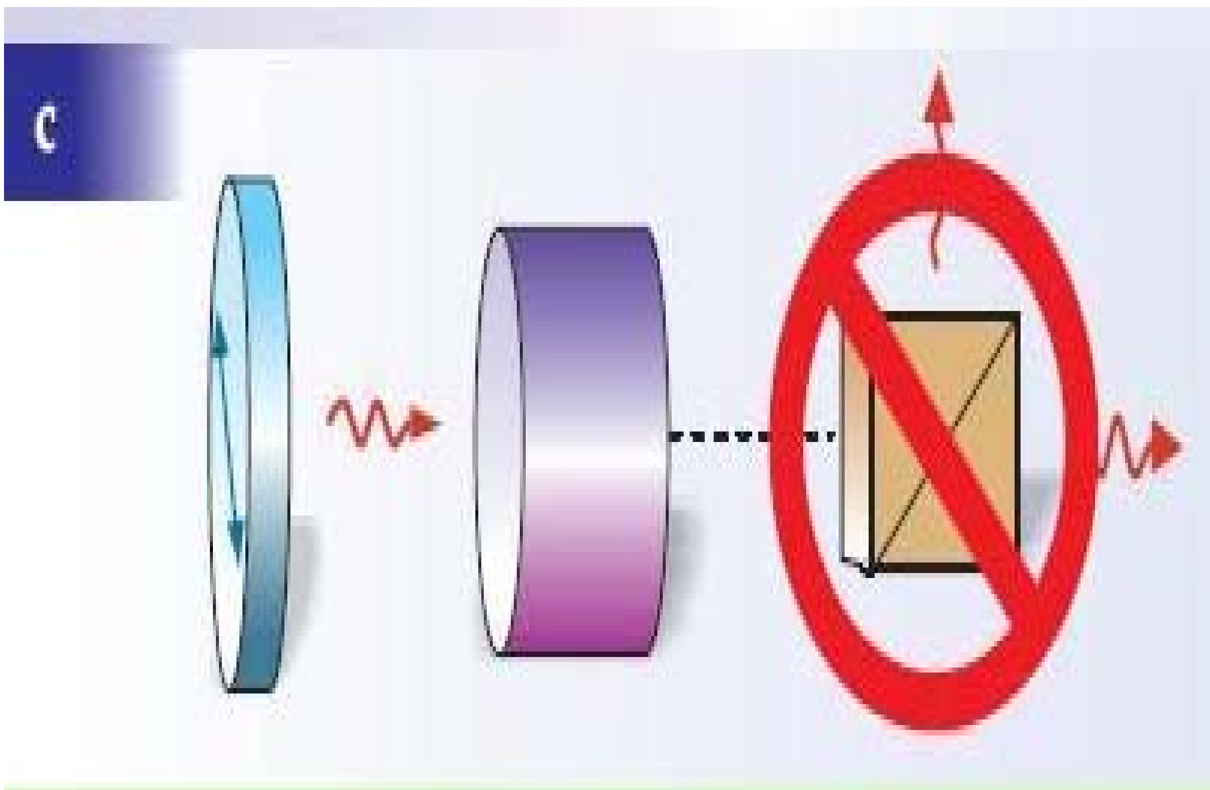
a) Si le llega un fotón polarizado verticalmente nos devolverá dos fotones polarizados verticalmente.



b) Si le llega un fotón polarizado horizontalmente nos devolverá dos fotones polarizados horizontalmente.



c) Si le llega un fotón con una polarización arbitraria, el proceso de copia o nos da fotones polarizados verticalmente o nos da fotones polarizados horizontalmente.



Es decir, esta máquina no puede copiar un estado arbitrario de polarización.

Este ejemplo es muy pedestre pero aun así contiene la esencia de lo anteriormente expuesto.

No hay forma de copiar un estado cuántico arbitrario

Los beneficios

1) Aunque copiar información es algo útil, la cuántica se empeña en ponerlo difícil (imposible de forma perfecta y fiable). Esto no deja de ser una virtud para varias cosas. Por ejemplo, si se concibe una clave criptográfica basada en estados cuánticos se estará seguro de que no podrán copiar los mensajes emitidos por la fuente y solo los poseedores de la clave podrán leer los mensajes.

El teorema de no copiado es una de las bases de la criptografía cuántica.

2) Además, este hecho está íntimamente relacionado con la imposibilidad de enviar instantáneamente información a través de procedimientos cuánticos.
Para poder hacer eso deberíamos de ser capaces de teletransportar y copiar un estado cuántico cualquiera de un punto a otro.
Sin embargo, esto no es posible por dos motivos relacionados con este teorema, la copia no sabemos si es fiable o no y al intentar copiar destruyo el estado original.
De hecho, estos teoremas de no copiado, que no se llegaron a ellos hasta el 1982 se obtuvieron al estudiar la posibilidad de la transmisión instantánea de la información.

Demostración formal del teorema

Lo haremos de forma ordenada explicando todos los pasos:

Supongamos que queremos copiar un estado cuántico arbitrario (que no conocemos) $|\phi\rangle$.

Esto lo copiaremos en un estado $|copia\rangle$ (un sistema que tengamos a nuestra disposición, un electrón, un fotón, etc).

Lo que queremos es pasar el estado $|\phi\rangle$ al estado $|copia\rangle$ para obtener la copiar que queremos. En otras palabras, el estado $|copia\rangle$ funciona como una hoja en blanco sobre la cual haremos la copia del estado $|\phi\rangle$.

Desde el punto de vista matemático el dispositivo de copia estará representado por un operador unitario $U_{copiado}$.

Al aplicar este operador sobre el estado cuántico desconocido $|\phi\rangle$ el resultado es:

$$U_{copiado}(|\emptyset\rangle|copia\rangle) = (|\emptyset\rangle|\emptyset\rangle)$$

Dado que este procedimiento queremos que valga para cualquier estado arbitrario $|\psi\rangle$, también se debería de cumplir que:

$$U_{copiado}(|\psi\rangle|copia\rangle) = (|\psi\rangle|\psi\rangle)$$

Ahora tomemos el producto escalar de la parte izquierda de estas dos expresiones:

$$\langle\psi|copia|U^*{}_{copiado}U_{copiado}|\phi\rangle|copia\rangle$$

Como el operador $U_{copiado}$ es unitario se verifica que $U^*U = 1$, donde $U^*{}_{copiado}$ es el operador complejo conjugado de $U_{copiado}$.

Por tanto, tenemos:

$$(\langle\psi|\langle copia|)\big(|\phi\rangle|copia\rangle\big)$$

Ahora el producto escalar se toma, primero con primero y segundo con segundo:

$$(\langle\psi|\langle copia|)\big(|\phi\rangle|copia\rangle\big) = \langle\psi|\phi\rangle\langle copia|copia\rangle$$

Dado que los estados han de estar normalizados:

$$\langle copia|copia\rangle = 1$$

Por lo que nos queda:

$$\langle\psi|\phi\rangle$$

Tomando el producto escalar de la parte derecha de las ecuaciones llegaríamos, siguiendo los pasos apropiados, a la expresión:

$$(\langle\psi|\psi|)(|\phi|\phi\rangle) = (\langle\psi|\phi\rangle)^2$$

Igualando el resultado de la parte izquierda y el de la derecha:

$$\langle\psi|\phi\rangle = (\langle\psi|\phi\rangle)^2$$

Eso implica que los únicos resultados posibles para que esto se verifique es que el producto interno entre estos estados sea 0 o 1.

Es decir:

Solo podemos copiar de forma fiable estados originales que sean ortogonales

como en el caso de la imagen anterior.
En cualquier otro caso la copia no es fiable. Esta derivación se basa en la unitariedad del operador que representa la copia y la unitariedad es esencial en mecánica cuántica.
Se puede dar otro argumento basado en la linealidad del operador (otra característica esencial en cuántica) llegando a iguales conclusiones.

Así que concluyendo:

No se puede diseñar un dispositivo que copie de forma perfecta un estado cuántico arbitrario sin alterar el original de algún modo.