Teorema de no clonación
e
influencia en el entrelazamiento cuántico

Parte I

Dr. Ing. Ernesto Gandolfo Raso
egandolfo@frm.utn.edu.ar

Estados
y
Valores Propios

Observable

Un estado cuántico contiene la información sobre un sistema. Ese sistema es algo que podemos **OBSERVAR**, es decir, que contiene determinadas variables que se pueden medir de alguna manera.

El estado cuántico **nos permite predecir la probabilidad** de medir unos valores u otros de esas variables.

Cada una de esas variables que podemos medir se denominan OBSERVABLES

Un estado cuántico sin observables sería un objeto matemático sin relación con la realidad.

Aunque utilicemos conceptos abstractos, ***el fin último de la física cuántica, y de la física toda, es predecir el comportamiento de sistemas físicos del Universo real***.

Un sistema físico debe poseer, al menos, un observable (aunque prácticamente todos tienen muchos observables).

La moneda, como sistema, tiene un único observable, la “cara”.

Desgraciadamente, la palabra “cara” en este contexto es ambigua, porque la moneda puede mostrar cara o cruz al mirarla, de modo que hay que darle otro nombre a la magnitud observable: digamos que es **el lado** de la moneda.

Nuestro observable ***lado***, al medirlo, puede tomar dos valores, ***cara*** y ***cruz***.

Observar la moneda significa, por lo tanto, **MEDIR el valor del único observable**, el ***lado*** de la moneda.

En el caso de un sistema físico real, como podría ser un electrón dentro de un pozo infinito, puede haber varios observables, como la posición del electrón, su energía, su momento lineal, etc., y podemos medir uno de ellos o varios a la vez (muchas veces con límites en la precisión de unos u otros de acuerdo con el principio de incerteza).

Es evidente que, **en el momento de observar la moneda, el estado cuántico cambia**.
De hecho, en el caso de la moneda, una vez que la observamos ésta sólo puede encontrarse en uno de estos dos estados:

$$|\text{cara}\rangle \quad \text{o} \quad |\text{cruz}\rangle$$

que se corresponden con los dos posibles valores del único observable del sistema, el *lado* que muestra la moneda.
Sin embargo, antes de mirar la moneda el estado podía haber sido otro de muchos.

En el mundo real, existen dos razones por las que el **estado cuántico** cambia al observar el sistema:

1º- Puesto que el estado representa la información que tenemos del sistema, al ***observar*** el sistema ***la información de que disponemos cambia*****,** con lo que el estado también lo hace.

2º- Aunque esto no suceda en la moneda– la observación del sistema ***requiere necesariamente una interacción con él*****,** lo que inevitablemente lo modifica de alguna manera.

La segunda razón es la que suele llamarse ***efecto del observador*** y es muy comúnmente mostrada como la causa del principio de indeterminación.

Esto no es cierto; además del efecto del observador el principio de indeterminación se debe a la naturaleza dual de la materia, que hace que muchas variables del sistema aparezcan “de a pares”, como la posición y el momento lineal, que no pueden medirse con precisión simultáneamente

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \Delta t \, \Delta Ep \geq \frac{\hbar}{2}$$

En el caso de la moneda esto no sucede porque hemos simplificado tanto las cosas que sólo existe un observable: podemos medirlo con precisión absoluta (es decir, conocer exactamente si el valor del *lado* es *cara* o es *cruz*) sin afectar a ningún otro observable… *porque no existe ningún otro*.

La cuestión es que existen casos en los que el estado antes y después de mirar la moneda es el mismo. De modo que, en este caso especial, el estado de la moneda antes de mirarla es |cruz⟩, y si abrimos la caja y miramos la moneda, veremos que muestra cruz: su estado sigue siendo entonces |cruz⟩.
En este caso particular (al igual que hubiera sucedido si supiéramos que la moneda mostraba cara) el estado no cambia durante la observación.

Es más: ni siquiera nos hace falta una observación, ya que nosotros **hemos preparado el sistema** de modo que el observable tenga, seguro, uno de los dos valores que podemos medir.
Pero lo importante de todo esto es que sólo podemos lograrlo en dos situaciones fijas: cuando la moneda está en los estados |cara⟩ o |cruz⟩, que se corresponden con los dos valores posibles del observable ***lado***.

Estos dos estados son, por lo tanto, especiales – no cambian al medir el observable asociado a ellos y se corresponden con valores concretos del observable (en este caso, *cara* y *cruz*).

En mecánica cuántica estos valores del observable se denominan:

autovalores, **valores propios** o **eigenvalores**

y los estados correspondientes se llaman:

autoestados, **estados propios** o **eigenestados**.

Recapitulemos: de los infinitos estados que puede tener la moneda antes de la observación, existen dos que son especiales, los dos ***estados propios*** de la moneda:

$$|\text{cara}\rangle \text{ y } |\text{cruz}\rangle$$

Cuando la moneda está en uno de estos estados (lo cual requiere que hayamos preparado las cosas cuidadosamente para que así sea), al observarla su estado no cambia, y el valor que medimos del observable *lado* es *cara* o es *cruz*, los dos ***autovalores*** del sistema, correspondientes a los dos ***autoestados*** anteriores.

Pero, además del hecho de que se corresponden con los valores posibles de un observable, los *estados propios* tienen otra propiedad muy importante, aunque sea una consecuencia de la primera.

Esta propiedad hace referencia a que todos los estados de la moneda que no son autoestados.

Esta segunda propiedad es la siguiente:

los autoestados son completamente incompatibles entre sí tras una medición.

Imaginar dos estados cualesquiera de la moneda que no sean los dos *eigenestados* (uno de ellos puede serlo, pero no los dos).
Por ejemplo, pensemos en dos estados que manejamos:

$$|\text{cara}\rangle \text{ y } |\text{agitada}\rangle$$

Supongamos que un observador A tiene una moneda en una caja, y uno B otra.
La monedad de A es $|\text{cara}\rangle$, la de B es $|\text{agitada}\rangle$.

Sin mirar dentro de las cajas: *¿es posible que*, *tras mirar las monedas*, *ambas estén en el mismo estado?*

La respuesta debería ser “*Sí*”.
Cuando miremos las monedas, la de A va a estar sin duda alguna en el estado propio en el que estaba, |cara⟩.
No sabemos en cuál de los dos autoestados va a estar la de B, pero es posible que también sea |cara⟩, con lo que los estados iniciales de nuestras dos monedas no son incompatibles.
Supongamos que la moneda de A es |agitada⟩ y la de B sigue el proceso siguiente: se toma la caja, se agita y, si muestra cruz, vuelve a agitarla de nuevo; llamemos al estado de la moneda de B |agitada/cara⟩, simplemente para mostrar que se favorece el que al final salga “cara”.

Ambos estados son una vez más, de acuerdo con nuestra particular definición de “compatible” *estados compatibles*: es perfectamente posible que, al mirar nuestras dos monedas, las dos muestren el mismo estado (que puede ser, en este caso, tanto |cara⟩ como |cruz⟩).

Sin embargo, **los *eigenestados* no pueden ser jamás compatibles**. Si la moneda A está en |cara⟩ y la B en |cruz⟩, es absoluta y totalmente imposible que se encuentren en el mismo estado cuando las miremos. Y esto proporciona a los autoestados una potencia tremenda para describir estados que no lo son.

En la notación de Dirac existe una forma poderosa, simple y elegante de expresar este concepto de ***compatibilidad***.

La compatibilidad entre dos estados $|a\rangle$ y $|b\rangle$ puede expresarse simplemente como:

$$\langle a|b\rangle$$

y su valor determina lo compatibles (o incompatibles) que son ambos estados.

1º) Observar que se han "cambiado de lado" los paréntesis de $|a\rangle$.

Los estados escritos como hemos hecho hasta ahora se denominan ***kets*** y los estados escritos "al revés" se denominan ***bras*** .

Cuando escribes los dos estados juntos de ese modo, como $\langle a|b\rangle$, se escribe un *bra*-*ket*, al completar el "paréntesis" de los símbolos $\langle\rangle$.

2º) Aunque $|a\rangle$ y $|b\rangle$ son dos estados cuánticos, el *bra-ket* $\langle a|b\rangle$ **es un número**.

Y el valor de ese número nos indica si $|a\rangle$ y $|b\rangle$ son completamente incompatibles, si son más o menos compatibles o si se trata del mismo estado cuántico.

Si $\langle a|b\rangle = 0$ eso quiere decir que **los estados son incompatibles**.

De modo que, en vez de decir “una moneda no puede mostrar cara y cruz a la vez” se podría escribir:

$$\langle \text{cara}|\text{cruz}\rangle = 0$$

Si $\langle a|b\rangle = 1$ eso quiere decir que **los dos estados son realmente el mismo estado**.

Puede pensarse en ese 1 como “100% de compatibilidad, es decir, son la misma cosa”, mientras que el 0 anterior es “0% de compatibilidad, los dos estados no tienen nada que ver”.

Aunque parezca raro, es posible tener dos estados que parecen diferentes pero que, si miras con cuidado, resultan ser el mismo. La manera más fácil de verlo es comprobando la compatibilidad de ambos estados – si es 1, es que se trata realmente del mismo estado.

Finalmente, es posible que $\langle a|b \rangle$ no sea 0 ni 1.

En general se trata de un número complejo, pero cuanto mayor sea su módulo, es decir, más parecido a 1 –ya que 1 es el máximo de compatibilidad–, más parecidos son los dos estados, y cuando más similar a 0 sea, más incompatibles son los dos estados.

Los estados cuánticos pueden expresarse como vectores unitarios, o versores, y el bra-ket ⟨a|b⟩ es el producto escalar o producto interno de ambos versores.

Al igual que en los vectores:

1- Si el producto escalar es nulo, los vectores son perpendiculares (estados incompatibles).

2- Si el producto es 1 es que tienen la misma dirección y sentido, es decir, son el mismo vector (ambos son unitarios).

3- En cualquier otro caso no son ni una cosa ni la otra. Pero cuanto más cercano a 1 sea el producto escalar, más pequeño es el ángulo que forman los dos vectores.

Por ejemplo, supongamos que la moneda está en |cara⟩. Se llevan la caja y la agitan; mira la moneda y, si muestra cara, la deja como está, pero si es cruz, agita la caja de nuevo.

A continuación mira la moneda y, si es cara, la deja como está, pero si es cruz agita la caja… *y realiza ese proceso cien veces.*
De modo que la probabilidad de que mi moneda, cuando la miremos, muestre cara es casi del 100%.
Llamemos al estado de la moneda:

|agitada/cara/cienveces⟩

Se puede ver que el producto de los dos estados:

$$\langle \text{cara} | \text{agitada/cara/cienveces} \rangle$$

aunque no es 1 (porque el estado A y el B no son iguales, ya que existe la posibilidad de que la moneda A muestre cruz cuando la miremos aunque sea una probabilidad muy pequeña), es casi 1: supongamos que su módulo es 0,99.

Como se puede ver, el valor de $\langle a|b \rangle$ es de gran utilidad para comprobar cuánto tienen que ver los dos estados entre sí; y, en términos de esta notación, si $|a\rangle$ y $|b\rangle$ son dos autoestados del sistema, podemos

Utilizando la terminología, los autoestados son completamente incompatibles – en términos vectoriales (y esto tiene gran importancia)

los autoestados son siempre perpendiculares entre sí

Pero *¿qué hay de todos los demás estados que no son autoestados?*

¿Cómo podemos calcular:

$\langle$agitada|agitada/cara/cienveces$\rangle$?

¿Es que vamos a tener que inventarnos nombres para todos los infinitos estados posibles del sistema, como:

|agitada/perounpoquito$\rangle$

|agitada/cara/cincuentaveces$\rangle$

o

|agitada/cruz/luego/cara$\rangle$?