UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL MENDOZA

Teorema de no clonación e influencia en el entrelazamiento cuántico

Parte I

Dr. Ing. Ernesto Gandolfo Raso
egandolfo@frm.utn.edu.ar

Superposiciones cuánticas

Ya se definió el concepto de estado cuántico, y sobre un tipo de estados especiales: los eigenestados, *estados propios* o *autoestados* de un observable determinado.

Una de las propiedades fundamentales de los *autoestados* era que se trataba de lo que llamamos "estados incompatibles".
Esta propiedad proporciona a los *autoestados* una enorme potencia para describir cualquier otro estado cuántico del sistema (al menos, en lo que se refiere al observable al que describen).

Debemos profundizar algo más en el concepto de "estados incompatibles".
Los dos *eigenestados* de la moneda, $|\text{cara}\rangle$ y $|\text{cruz}\rangle$, establecen las dos únicas posibilidades que pueden medirse del observable *lado* de la moneda; cualquier otro estado se "colapsa" a uno de estos dos estados una vez que observamos la moneda.

Es más: cualquier estado anterior, viene a ser una medida de la probabilidad de que, al observar la moneda, su estado sea:

$$|\text{cara}\rangle \text{ o } |\text{cruz}\rangle$$

Es como si cualquier estado pudiera ser:

“completamente|cara⟩”, “completamente|cruz⟩”

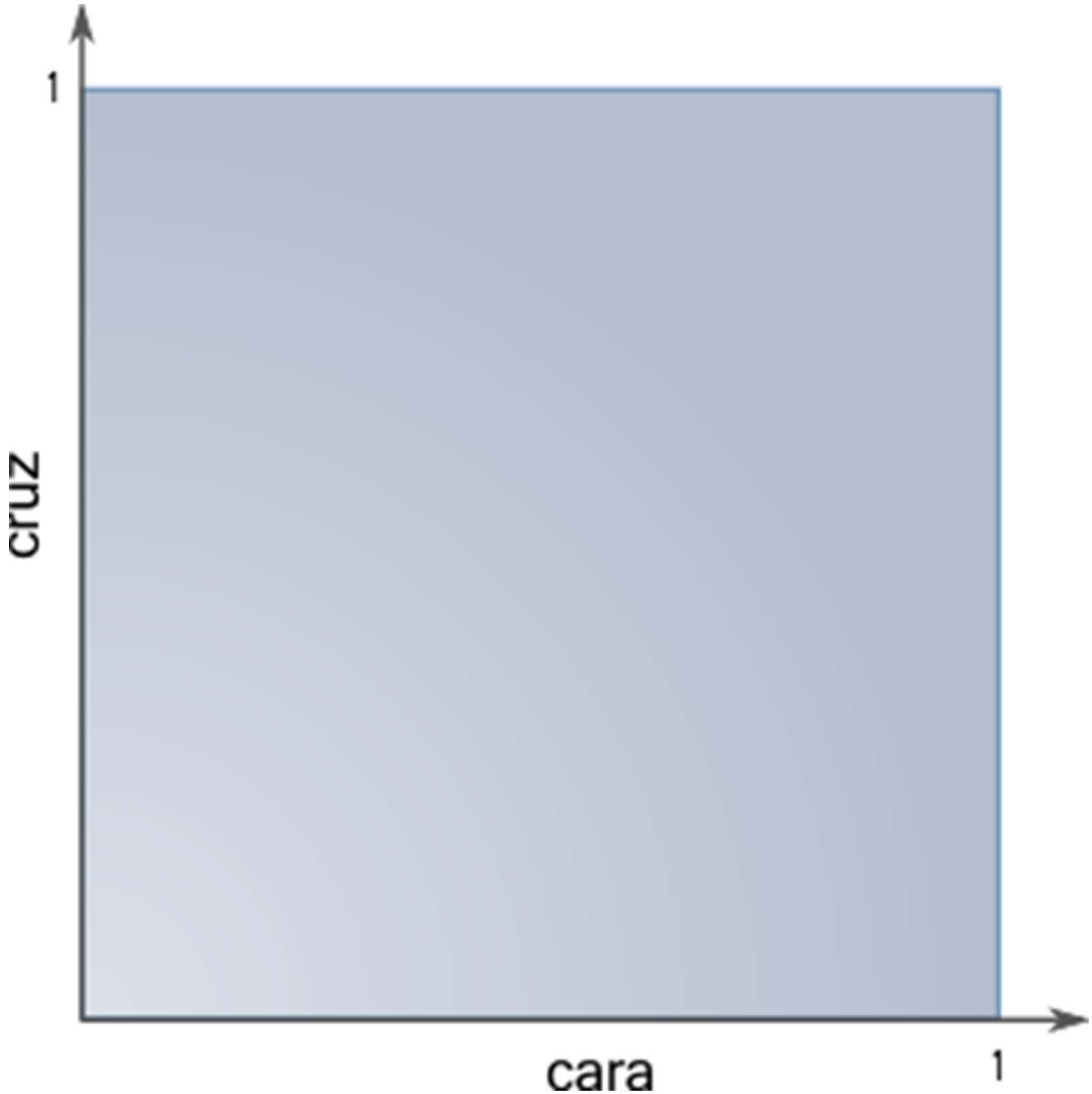
o una combinación de los dos:

“casi completamente|cara⟩ y un poquito|cruz⟩”,
“prácticamente|cara⟩ pero un poco|cruz⟩”,
“medio|cara⟩ y medio|cruz⟩”,
etc.

Es decir, puede pensarse en los estados de la moneda como superposiciones de los dos autoestados.
Esto es posible, precisamente, por la propiedad de la incompatibilidad de los dos estados o, matemáticamente, por la *perpendicularidad* entre los dos *autoestados*.

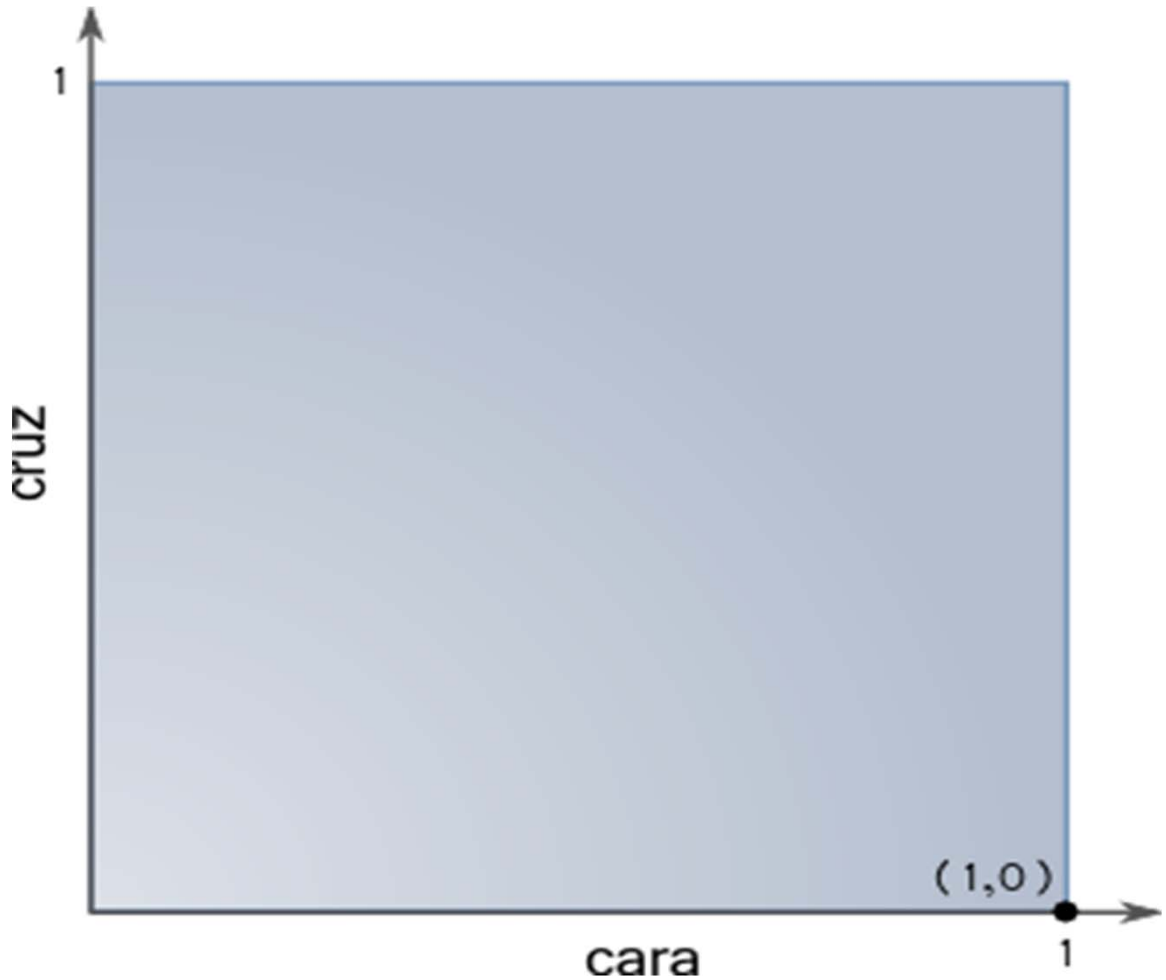
Una manera bastante visual de representar las posibilidades del estado de la moneda es utilizar coordenadas espaciales.
Imaginemos que dibujamos dos ejes: el eje horizontal *“eje cara”* y el eje vertical *“eje cruz”*. Ambos ejes van de 0 a 1 (porque, suponemos que los estados están *normalizados* y ese 1 significa “100%”).

Al final, tenemos un cuadrado de lado 1 como éste, en el que el origen –el punto (0,0).

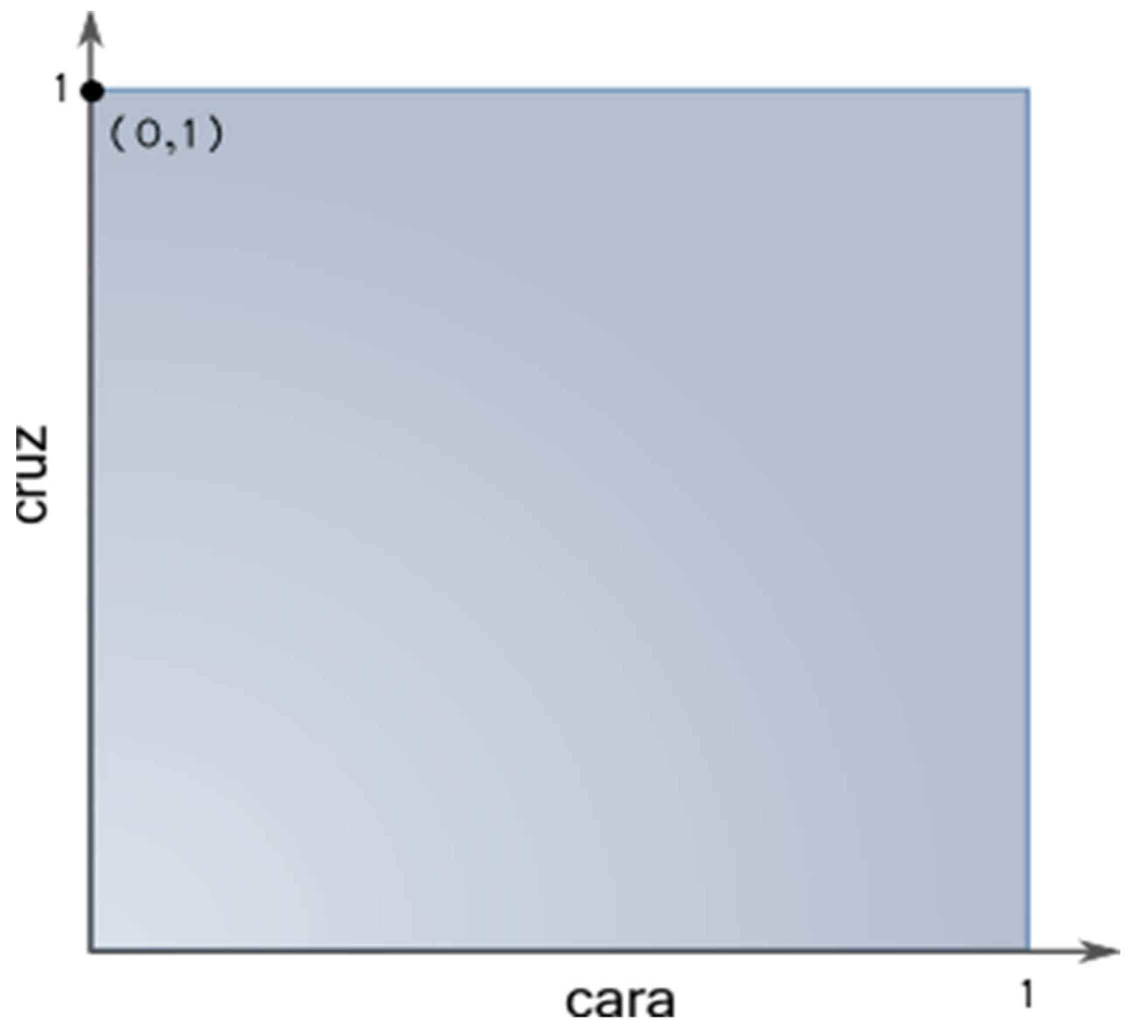


1
cruz
cara
1

Podemos representar cualquier estado posible de la moneda en ese cuadrado. Empecemos por los dos más evidentes: el estado |cara⟩ está puramente sobre el "eje cara" horizontal, y no tiene absolutamente nada de "cruz", con lo que sus coordenadas en nuestro cuadrado serían (1,0).



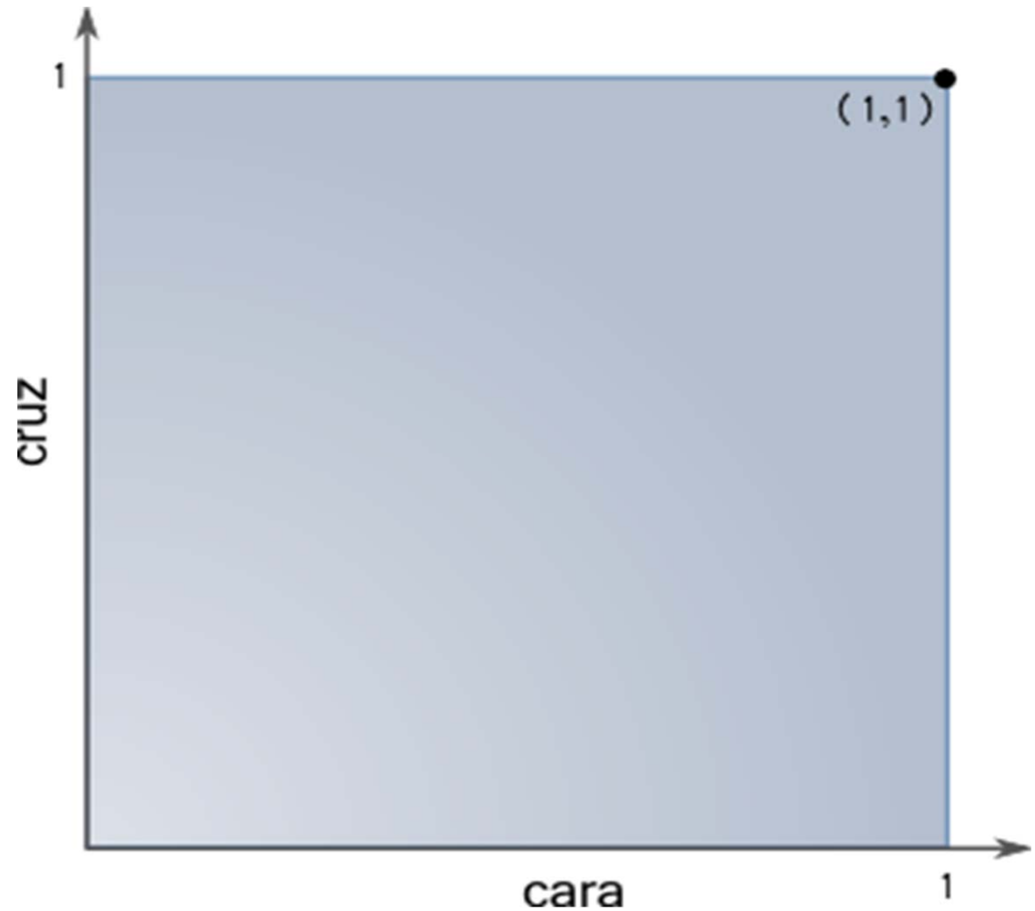
Lo mismo sucede con el otro *autoestado*, |cruz⟩: en este caso sucede al contrario. No tiene nada de “horizontal” (cara) y es completamente “vertical” (cruz), de modo que sus coordenadas en el cuadrado son (0,1).



Cualquier otro estado de la moneda puede dibujarse como un punto dentro del cuadrado.
Pero es fundamental que se entienda para comprender realmente la naturaleza de la representación de estados en función de $|\text{cara}\rangle$ y $|\text{cruz}\rangle$ que:

Todos los estados posibles son puntos dentro del cuadrado, pero no todos los puntos del cuadrado son estados posibles.

Por ejemplo, observar en el punto (1,1):



¡Es imposible que ese punto se corresponda con un estado de nuestra moneda!

Significaría que ese estado es un 100% |cara⟩ y un 100% |cruz⟩ a la vez, ¡absurdo!

Definimos $\langle estado1|estado2 \rangle$ como el “grado de compatibilidad” de un estado con otro, y se dijo que su valor máximo era 1, cuando ambos estados eran el mismo.
Esa condición, en el cuadrado, se traduce al hecho de que:

la distancia de cualquier estado al origen debe ser exactamente 1.

Esto garantiza, entre otras cosas, que la probabilidad de observar “cara” o “cruz” al mirar la moneda sea siempre del 100% en total.

Cualquier estado que no esté a una distancia 1 del origen no puede ser un estado real, porque al sumar las probabilidades de obtener “cara” y de obtener “cruz” al medir el valor del *lado* de la moneda, se obtendría un valor de menos del 100% (en cuyo caso la moneda puede estar en algún estado que no es $|\text{cara}\rangle$ ni $|\text{cruz}\rangle$ al observarla y, entonces, hay algún *autoestado* que no habíamos considerado) o mayor del 100% (y entonces a veces es posible que la moneda esté *al mismo tiempo* en:

$$|\text{cara}\rangle \text{ y } |\text{cruz}\rangle$$

lo cual significa que esos estados *no son autoestados*).

En cualquiera de los dos casos habríamos cometido error:

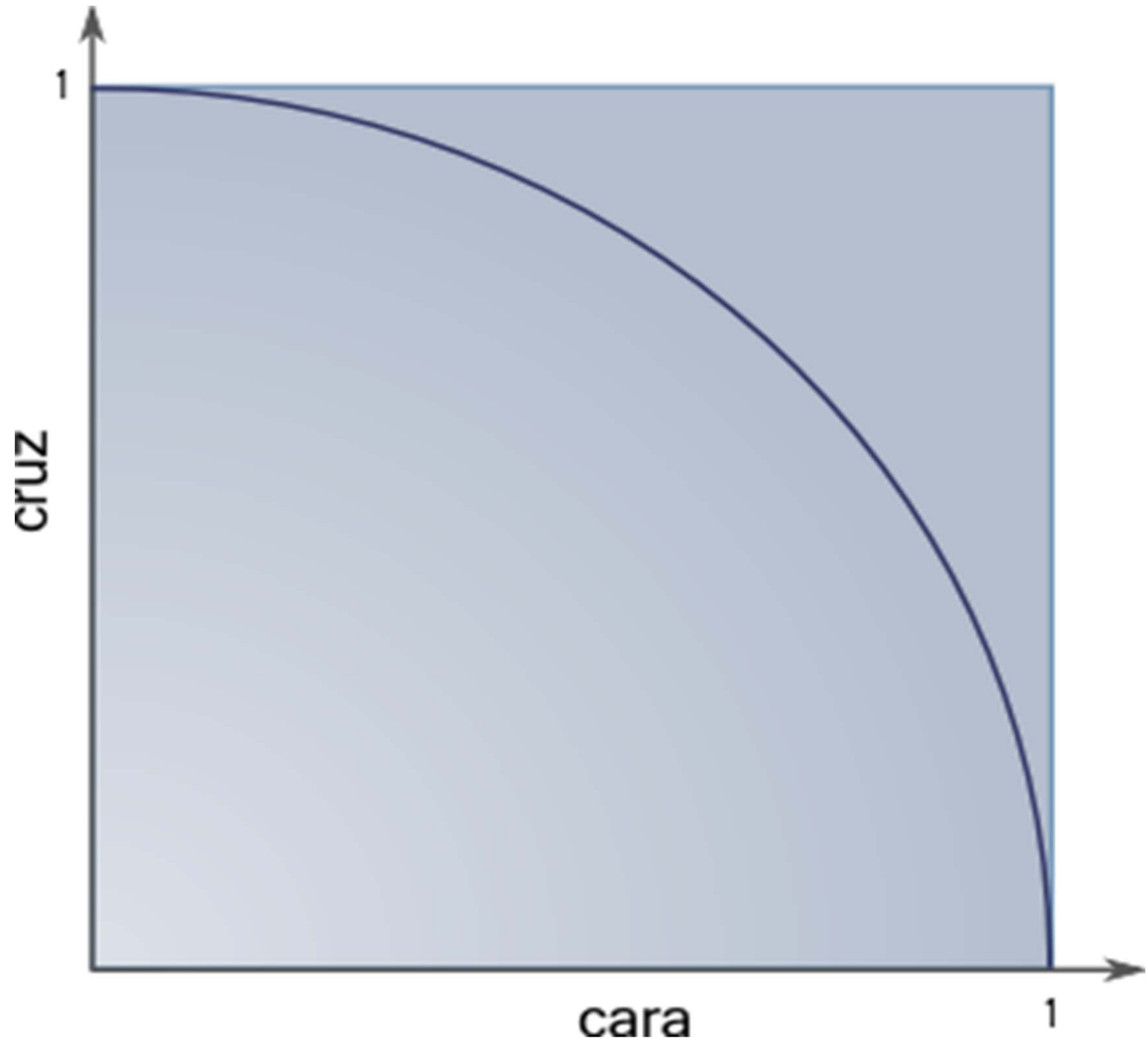
o faltan *autoestados* en un caso, o no son *autoestados* en el otro.

¿Qué puntos de nuestro cuadrado *sí* se corresponden con estados posibles de la moneda?

Los puntos del interior del cuadrado que están a una distancia de 1 del origen, es decir:

***un cuarto de circunferencia*.**

Pero hay una forma muy fácil de verlo.
Puesto que cualquier estado real de la moneda está a una distancia de 1 del origen (es decir, de la esquina inferior izquierda de nuestro cuadrado), imaginemos que tenemos una barra de longitud 1, y que ponemos un extremo justo en la esquina inferior izquierda: el otro extremo se encuentra siempre a una distancia 1 de ese punto, con lo que cualquier estado real de la moneda está sobre el otro extremo de la barra – si ahora movemos la barra (siempre con un extremo sobre el origen), el extremo opuesto "pinta" todos los posibles estados de la moneda, es decir, todos los puntos del cuadrado que distan 1 del origen.


1
cruz
cara
1

En primer lugar, observar en el cuarto de circunferencia representa gráficamente **todos los estados posibles de la moneda**.
Como ya se dijo, ***hay infinitos estados***, puesto que esa línea contiene infinitos puntos.
Dos de ellos son especiales: los que se encuentran justo sobre los ejes, es decir, (1,0) y (0,1), que se corresponden con $|cara\rangle$ y $|cruz\rangle$.
Se pueden escribir así:

$$|cara\rangle = 1|cara\rangle + 0|cruz\rangle$$

y

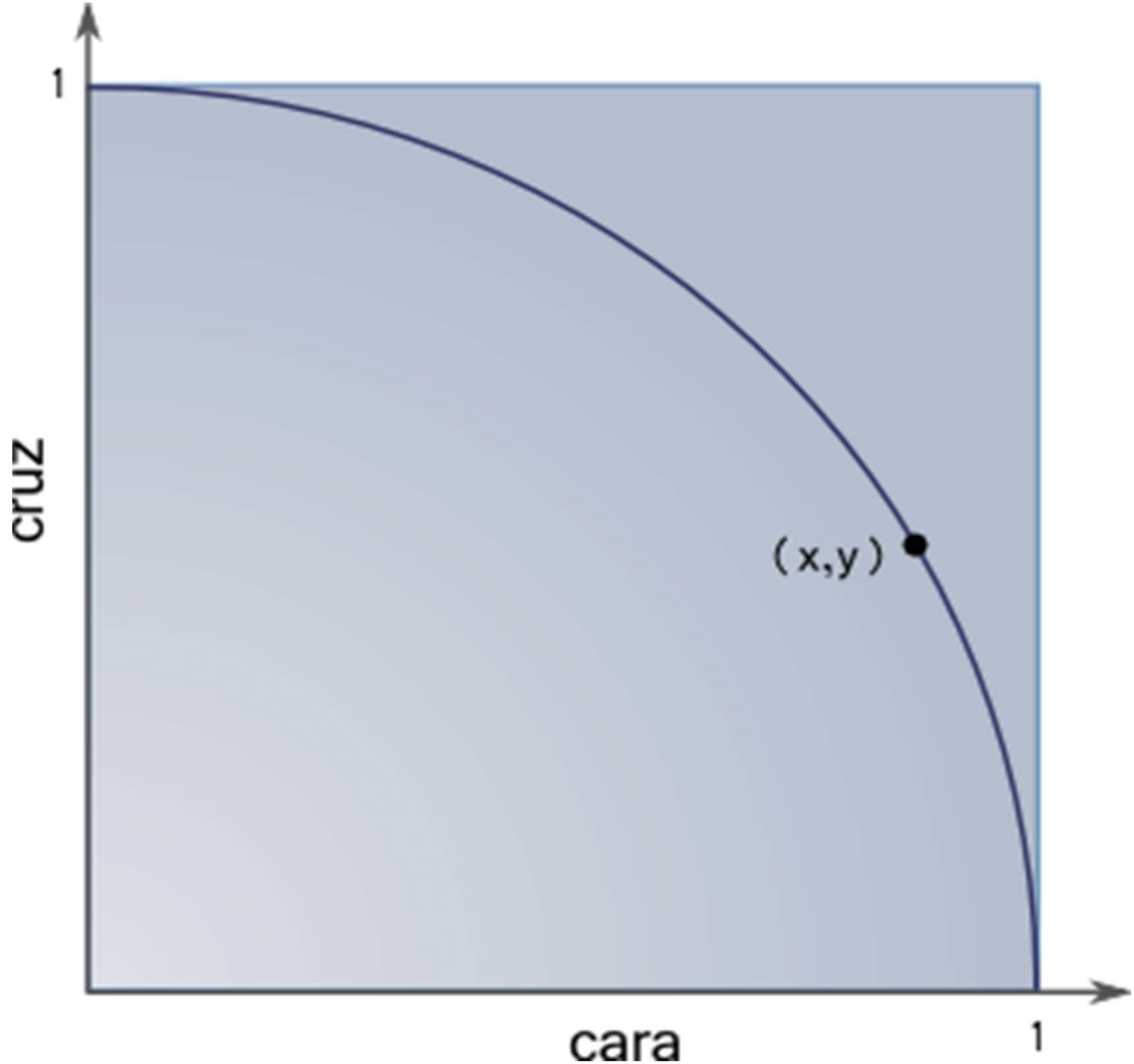
$$|cruz\rangle = 0|cara\rangle + 1|cruz\rangle$$

Cualquier otro estado posible de la moneda puede expresarse como un punto (x,y) de ese cuadrado. Pero hay que detenerse en lo que esto significa:

las coordenadas x **e** y **del punto nos indican cuánto de** $|\text{cara}\rangle$ **y cuánto de** $|\text{cruz}\rangle$ **tiene.**

Es decir, el punto (x,y) representa un estado que podemos escribir como:

$$|\text{estado}\rangle = x|\text{cara}\rangle + y|\text{cruz}\rangle$$


1
cruz
(x,y)
cara
1

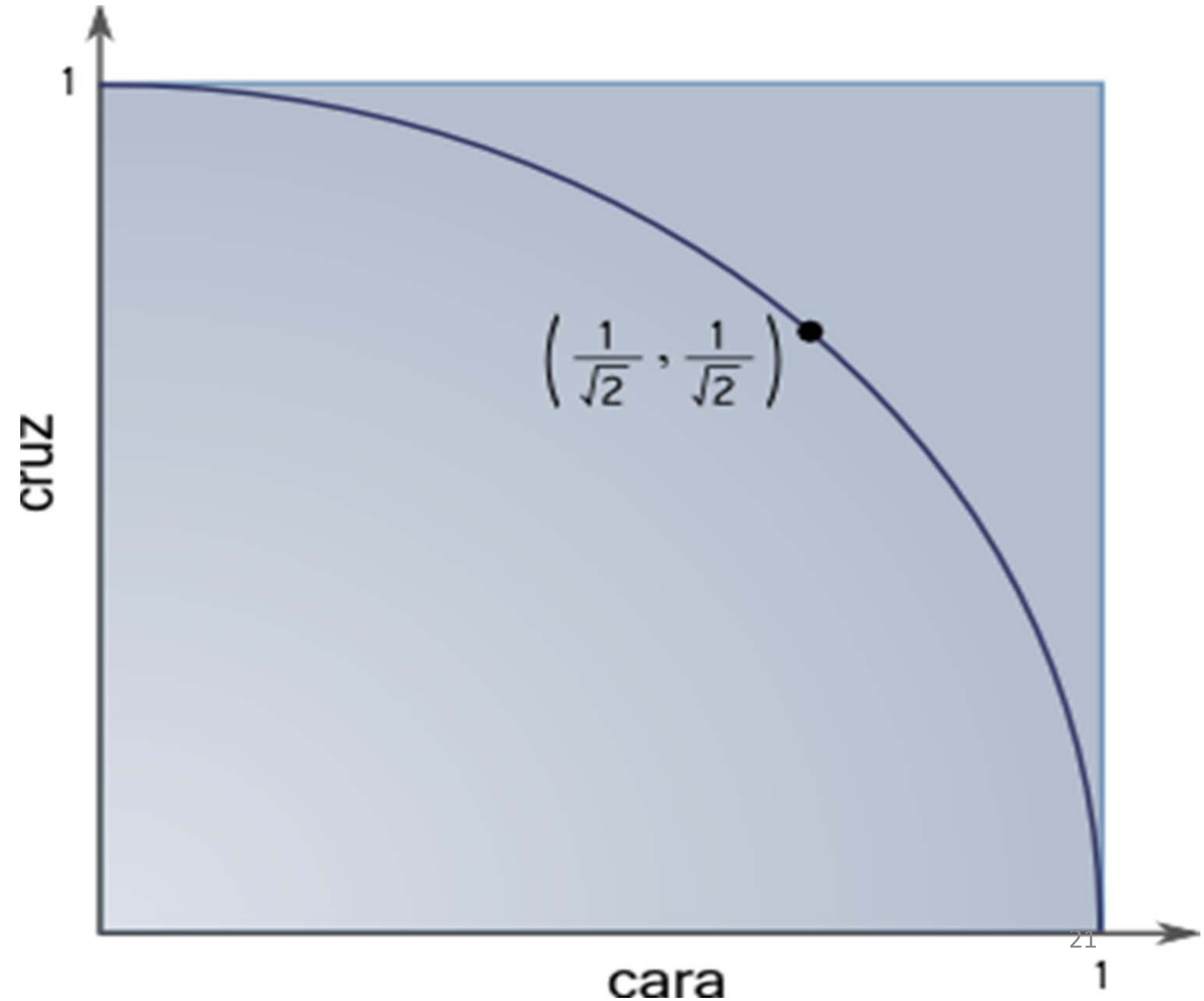
En las coordenadas del cuadrado, ¿cómo se escribiría el estado $|\text{agitada}\rangle$?
Se trata del estado de la moneda cuando se había agitado la caja una vez y nadie había mirado aún dentro de ella.
Es posible que el primer impulso sea decir que:

$$|\text{agitada}\rangle = \frac{1}{2}|\text{cara}\rangle + \frac{1}{2}|\text{cruz}\rangle|$$

pero hay que mirar el cuadrado: el punto que representa ese estado, es decir, el punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ***no está a una distancia 1 del origen***, está en el interior de la circunferencia, no sobre su borde.

Gráficamente es fácil ver que el punto que tiene “lo mismo de cara que de cruz” es el punto que se encuentra justo en el medio de nuestro arco de circunferencia.

Sólo hay un punto que tenga lo mismo de cara que de cruz y diste en 1 del origen:



Las coordenadas de ese punto son: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

y el estado: $|\text{agitada}\rangle$ sí puede escribirse como:

$$|\text{agitada}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{cara}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{cruz}\rangle$$

Por supuesto: ***cualquier otro estado también puede escribirse como una combinación "ponderada" de los autoestados.***

Se han representado todos los estados posibles de la moneda en un “sistema de coordenadas” que se acaban de inventar, en el que se usó a los dos ***estados propios*** como dimensiones.
Se ha creado, por lo tanto, **UN ESPACIO CONCEPTUAL DE DOS DIMENSIONES**, dentro del cual se encuentran localizados (conceptualmente) absolutamente todos los posibles estados de la moneda.
Los infinitos estados, constreñidos a una línea imaginaria (el arco de circunferencia) en un espacio conceptual cuyas dimensiones son los propios ***eigenestados*** del sistema.

No es necesario, por lo tanto, realizar complejos cálculos para determinar todos los posibles estados de la moneda: ***sólo hace falta calcular dos estados***. Para cualquier otro estado sólo tenemos que calcular dos números: sus coordenadas en nuestro espacio bidimensional ***cara-cruz***.

Hay que tener en cuenta que, hasta ahora, se ha trabajado con una moneda, el sistema más simple que se ha podido imaginar.

Imaginemos ahora que tenemos un sistema algo más complejo que la moneda: **un dado de seis caras**.
En este caso se puede describir el sistema,
los *autoestados* y todo lo demás bastante más rápido que en el caso de la moneda.

Simplificando todo lo necesario, el sistema –el dado– tiene un observable, el *lado* que muestra al mirarlo. Al lanzar el dado, éste puede mostrar seis posibles valores del observable *lado*, es decir, puede mostrar: 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

Estos seis valores se corresponden, por supuesto, con los seis *autoestados* del sistema, que son los seis estados en los que puede encontrarse el dado una vez que lo hemos lanzado.

Llamemos a estos seis *autoestados* como sus valores asociados, para que sea evidente cuál es cuál:

$$|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle, |5\rangle \text{ y } |6\rangle$$

¿Cómo representar todos los demás estados del dado que no son autoestados?
Pues, una vez más, utilizamos los *autoestados* como las dimensiones del espacio conceptual. En este caso, y se trata de un simple dado, ya aparecen cosas bien abstractas: no se trata ahora de un espacio de dos dimensiones, como en el caso de la moneda, …

se trata de un espacio de seis dimensiones

las correspondientes a los seis *estados propios* del dado.

En este espacio imaginario, cualquier estado del dado podría escribirse como un punto (x,y,z,p,q,r), donde esas letras son las coordenadas del punto en el espacio.
Todos los estados posibles del dado son puntos de ese tipo pero, una vez más, *no todos los puntos posibles son estados del dado*.
No hace falta dibujar nada para ver esto: por ejemplo, el punto (1,1,1,1,1,1) no es un estado posible, está *“fuera de la circunferencia”*.
Pero, claro, ahora no hay una circunferencia: estamos hablando de ***seis dimensiones***.
Para que sea más fácil de ver– si hubiéramos aumentado las dimensiones, pero no hasta seis, sino hasta algo más asequible: tres dimensiones, algo que sí podemos visualizar.

En ese caso, la condición que pusimos (los puntos posibles son aquéllos que están a una distancia 1 del origen) se traduciría, no en los puntos del cuadrado que disten 1 del origen, es decir, un cuarto de circunferencia, *sino en los puntos de un cubo de tres dimensiones que disten 1 del origen*, es decir… **una esfera**.

El conjunto de puntos del espacio que distan 1 de un punto determinado constituye una esfera en tres dimensiones.

En seis dimensiones, por supuesto, no aparece una esfera, pero la condición sigue siendo la misma: es el conjunto de puntos que están a una distancia 1 del origen.

La generalización del concepto de “esfera” a un espacio de *n* dimensiones recibe el nombre de *hiperesfera* o *n-esfera*, y es lo que se obtiene en este caso:

los infinitos estados posibles del dado constituyen una hiperesfera en el espacio de seis dimensiones formado por los autoestados

Por ejemplo, el estado del dado justo antes de lanzarlo (suponiendo que todos los estados son equiprobables) es un estado que tiene lo mismo de todos los *autoestados*.

No es $\frac{1}{6}$ de cada uno, porque entonces la distancia no sería 1: recordar el caso de la circunferencia y cómo las coordenadas del "punto medio" no eran $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, sino $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

En este caso sucede lo mismo, y podemos escribir el "punto medio" entre todos los estados como:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

En notación *bra-ket*, si llamamos al estado del dado antes de lanzarlo $|\text{previo}\rangle$, podemos decir que:

$$|\text{previo}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|3\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|4\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|5\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|6\rangle$$

Apliquemos nuestra nueva “representación espacial” a un caso aún más complejo: pozo de potencial infinito.
Una partícula dentro del pozo infinito no podía tener cualquier energía: sólo podía tener unos valores determinados. El valor más pequeño era el correspondiente al estado fundamental, y según aumentaba el número de nodos de la onda lo hacía también la energía que medíamos al mirar al electrón.
¿Qué quiere decir todo esto en los términos que venimos manejando ahora?
En primer lugar, el *observable* que estamos midiendo en este caso es la energía del electrón, y cuando lo hacemos obtenemos una serie de posibles valores – no todos son posibles, sino sólo los correspondientes a los “escalones”.

Es decir, las energías de cada escalón (la del estado con dos nodos, la del de tres, la del de cuatro, etc.) **son los autovalores de la energía del sistema**.
Y los estados del electrón que describimos entonces **son los autoestados del sistema**.

En el pozo infinito, *existen infinitos escalones de energía*. Es decir, al construir ahora nuestro "espacio conceptual" utilizando los *autovalores* del electrón como las dimensiones del espacio…
hay infinitas dimensiones, una por cada autoestado posible del electrón.

Llamemos, por ejemplo, $|E0\rangle$ al estado fundamental del electrón (la onda de dos nodos en los extremos), $|E1\rangle$ al siguiente "escalón", $|E2\rangle$ al siguiente, etc.
Entonces, cualquier estado posible del electrón –antes o después de mirarlo– puede expresarse como un punto en un espacio de infinitas dimensiones, cuyas coordenadas serán (a,b,c,d,…).
Sí, dentro del paréntesis *hay infinitas coordenadas*.
En la notación de Dirac, cualquier estado del electrón puede escribirse como:

$$|E\rangle = a|E0\rangle + b|E1\rangle + c|E2\rangle + d|E3\rangle\ldots$$

y así hasta el infinito.
Naturalmente, algunos de los estados posibles del electrón no son sumas infinitas, porque tal vez no incluyen a todos los autoestados, sino que muchas de sus coordenadas son cero.

Por ejemplo, supongamos que el electrón se encuentra "a medias" entre los estados $|E0\rangle$, $|E1\rangle$ y $|E2\rangle$. Entonces, su estado será (recordar que la distancia debe ser siempre 1, y las raíces correspondientes)

$$\frac{1}{\sqrt{3}}|E0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|E1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|E2\rangle$$

Pero, por supuesto, otros estados sí pueden involucrar infinitas coordenadas no nulas. Es decir, en general:

un estado cuántico se corresponde con un punto cualquiera de una hiperesfera en un espacio de infinitas dimensiones

Estos espacios conceptuales reciben el nombre de **espacios de Hilbert**.

Puede parecer que no es posible algo más abstracto y difícil de imaginar que el caso del pozo infinito y similares, pero lo hay; en el caso del pozo infinito existen tantos estados como números naturales hay… *pero también es posible tener un número infinito e incontable de dimensiones en un espacio de Hilbert.*

Por ejemplo, recordarás que la energía de un sistema cuántico "encerrado", como el electrón en el pozo infinito, sólo puede tomar valores escalonados… pero esto no sucede para un sistema libre: un electrón –por decir una partícula concreta– que viaja libre por el espacio puede tener cualquier energía. Entonces, los infinitos autoestados del sistema no son valores discretos, **sino cualquier valor real de la energía**.

Tenemos entonces un espacio ∞-dimensional con tantas coordenadas como existen números reales.
Además, lo que acabamos de describir son *estados cuánticos puros*.

También existen, cuando el sistema consta de muchas partículas, por ejemplo, *estados cuánticos mixtos* en los que la estadística usada se complica enormemente.